Fundamentos

Raízes e Potências

Raiz n-ésima (com Índice Par Positivo): dado o número real $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ e o número par $\boldsymbol{n} > 1$, a **raiz n-ésima** de $\boldsymbol{b}$ é número $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b}$ e o indicamos por $\boldsymbol{a} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{b}}$.

Em $\boldsymbol{a} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{b}}$, $\boldsymbol{n}$ é o **índice**, $\boldsymbol{b}$ é o **radicando**, $\boldsymbol{a}$ é a **raiz n-ésima** e, o símbolo $\sqrt{}$ é o **radical**. Se o índice é $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{2}$ usamos apenas o símbolo $\sqrt{}$ ao invés de $\sqrt[2]{}$.

Exemplos: 1) $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$. **2)** $\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2^4 = 16$. **3)** $\sqrt{0} = 0$, pois $0^2 = 0$.

Raiz n-ésima (com Índice Ímpar Positivo): dado o número real $\boldsymbol{b}$ e o número ímpar $\boldsymbol{n} > 1$, a **raiz n-ésima** de $\boldsymbol{b}$ é número $\boldsymbol{a}$ tal que $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b}$ e é indicado por $\boldsymbol{a} = \sqrt[\boldsymbol{n}]{\boldsymbol{b}}$.

Ex: 1) $\sqrt[5]{32} = 2$, pois $2^5 = 32$. **2)** $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$. **3)** $\sqrt[5]{0} = 0$, pois $0^5 = 0$.

Propriedades da Raiz n-ésima: dados inteiros $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, com $\boldsymbol{m} > 1$ e $\boldsymbol{n} > 1$

• quando $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{mn}$ são ímpares; • considerando $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ quando $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{mn}$ são pares;

Vale: • $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ • $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ • $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$

• $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ • $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ • $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

Na propriedade $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ ainda é preciso $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ se $\boldsymbol{m} < 0$ e, na propriedade $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ é preciso $\boldsymbol{a} > 0$; $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{p}$ inteiros maiores que 1.

Ex: 1) $\left(\sqrt[4]{9}\right)^4 = 9$ **2)** $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{3 \cdot 4} = \sqrt[5]{12}$ **3)** $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = 2$

4) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[3]{8}$ **5)** $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[3 \cdot 5]{7} = \sqrt[15]{7}$ **6)** $\sqrt[32]{3^{20}} = \sqrt[8 \cdot 4]{3^{5 \cdot 4}} = \sqrt[8]{3^5}$

Lembre que $\sqrt{x^2} = |x|$, onde $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0, \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

Veja: $\sqrt{8^2} = |8| = 8$, ou ainda, $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$.

Potência com Expoente Racional: Dado o número real positivo $\boldsymbol{a}$, e o número racional $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$ com $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ inteiros e $\boldsymbol{q} > 0$ temos

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}}$$

Em particular, para $\boldsymbol{q}$ inteiro e $\boldsymbol{q} > 1$, temos

$$\boxed{a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}}$$

Exemplos: 1) $10^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{10^3} = \sqrt[5]{1.000}$ **2)** $3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$ **3)** $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

Vale ressaltar ainda que dados os números reais positivos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e os números racionais $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, temos também as seguintes propriedades para as potências racionais:

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$